

汉语分数及小数认知中的 语义一致与概念分布

裘凯伦

(浙江大学, 浙江 杭州 310000)

[摘要] 有理数有多种表达形式, 如小数和分数。并且, 每一种表达形式都可根据不同的语境表达不同的概念意义。文章考察在现实语境中, 不同有理数形式所表达的多种概念意义的分布情况, 同时在中国语境下, 为语义一致现象提供证据。采用教材统计的方法分析了人教版小学一至六年级数学课本中数学应用题中分数与小数的使用情况, 并从媒体语言语料库 (MLC) 的口语语料中探索分数与小数在现实语境中的应用规律。研究发现, 汉语中小数更倾向于表示连续性客体, 分数更倾向于表示离散性客体。另外, 研究还发现, 汉语中小数通常用于表达一种一维语义概念, 即绝对数值; 而分数通常用于表达一种二维概念, 即两个数值之间的关系, 如部分与整体的关系、部分与部分的关系等。

[关键词] 数学认知; 有理数; 分数; 小数; 语义一致; 连续性与离散性客体; 一维关系与二维关系

[中图分类号] H0-05 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 2095-0292 (2019) 01-0102-05

一、引言

数学认知是人类认识客观世界所必需的基本能力^{[1](P720-734)}。人们是如何认知抽象的数学概念, 又是如何选择合适的数学概念解决生活中的相关问题的? 这些问题一直是心理学家以及数学教育家的研究重点。为了解答以上问题, 研究者们通常采用一种特殊的形式——数学文字题来研究现实生活中的数学认知机制。当代研究者认为, 数学认知系统和语言认知系统相互联系, 特别是与语义表征系统的联系更为紧密。Dehaene (2001) 认为, 人类拥有复杂精确的计算能力离不开高度发展的语言功能。语言的发展促使个体发展出一套基于数字符号系统的认知功能。数字文字题中发现的语义一致现象为数字认知系统与语义系统之间的密切联系提供了有力证据^{[2](P16-36)}。

语义一致现象 (semantic alignment) 是指在具体的情境中, 人总是寻求数学认知和客体的语义关系匹配的认知倾向^{[3](P401-433)}。Bassok (1995) 在考察大学生创建的数学文字题时发

现, 当呈现类别相关语义概念 (如苹果和橘子) 时, 78% 的大学生倾向于创建加法数学文字题; 当呈现功能相关的语义概念时 (如苹果和竹篮), 87% 的学生倾向于创建除法数学文字题^{[4](P1522-1538)}。Bassok (1998) 认为, 在解决数学文字题时, 人们会构建符合情境模型的数学模型, 而这个数学模型受客体之间的语义关系影响^{[5](P99-134)}。Martin 和 Bassok (2005) 提出, 在加法运算中 (如 $a + b = c$), 两个加数 (如 a 和 b) 之间的关系是平等且低于它们的合的 (如 c), 而这种关系正如同两个类别相关的物体 (如苹果和橘子) 之间的语义关系——平等且隶属于同一个上位词 (如水果); 而在除法运算中 (如 $a/b = c$), 除数 (如 a) 和被除数 (如 b) 之间的关系是不平等的 (如 $a/b \neq b/a$), 而这种关系正如同两个功能相关的物体 (如苹果和竹篮) 之间不平等的语义关系 (如一个竹篮可以包含苹果, 但是一个苹果不能包含竹篮)^{[6](P471-478)}。语义一致现象反映了人在现实情境中整合数学知识和客体概念知识的机制。Fisher (2010) 发现, 高中生和大学生在做客体间关系是不平等的除法

[收稿日期] 2018-11-26

[作者简介] 裘凯伦, 浙江大学博士研究生, 研究方向: 心理语言学、认知语言学。

相关问题时, 犯错率更低。特别是在数学文字题中, 相对于语义关系与数学关系一致的数学问题, 学生通常需要花更长的时间处理语义关系与数学关系不一致的问题^{[7](P1511-1516)}。

除了数学文字题中的有关客体的语义关系, 客体的连续性与离散性也同时影响着数学模型的构建。例如, 数学文字题中客体的连续性与离散性影响人们对部分客体的数学表示方式——分数或者小数。研究发现, 在教材编写及数学文字题创建任务中美国数学教育者和大学生更倾向于用分数描述离散性客体, 而用小数描述连续性客体。根据 Rapp 对美国 k-8 年级学生数学教材的统计, 在 78% 的小数数学文字题中, 客体具有连续性特点; 在 57% 的分数数学文字题中, 客体具有离散性特点^{[8](P47)}。Rapp (2015) 在考察大学生创建的分数或者小数数学文字题时同样发现, 在学生创建的小数数字文字题中, 72% 的题目包含连续性客体; 在创建的分数数字文字题中, 66% 的题目包含离散性客体。Lee, Dewolf, Bassok (2016)^{[9](P57)} Tyumenva et al. (2017)^{[10](P1-23)} 在对韩国和俄罗斯大学生创建数学文字题任务中也得到了类似的结果。然而, 中国在小数和分数的教学实践及教学侧重方面都与美国、韩国或俄罗斯有所不同。例如, 中国在小数和分数的教学上强调二者的互换性, 这则有可能导致小数和分数在描述离散性客体或连续性客体上没有差别。因此, 我们对小数和分数在中国的使用情况上的探究将对这种语义一致性现象的普遍性提供有力的证据。

此外, 我们发现, 前人研究在教材统计以及文字题创建任务中所发现的数字类型与客体类型之间的一致性现象的讨论中忽略了分数虽然相较于小数而言更倾向于描述离散性客体, 它同样广泛用于描述连续性客体, 甚至相较于离散性客体, 分数更常用于连续性客体的描述(如: 在韩国课本中有 63% 的分数用于描述连续性客体, 在俄罗斯课本中有 87% 的分数用于连续性客体)。因此, 我们认为在现实生活中, 人们在选择不同的数字记法时不仅受到数字类型与客体类型的一致性影响, 还会受到其他因素的影响。在这些因素中, 我们认为不同数字类型表达不同概念意义的偏向性是一个重要的影响因素。

有理数可表达多种概念意义, 包括测量、部分与整体、比、算子和商 (Kieren, 1976, 1980)^{[11](P101-144)}, 然而, 不同的有理数记法对不同概念意义的表达有着不同的倾向性。分数和

小数是有理数的两种不同的记数方法^{[12](P125-150)}。分数可以表示任何有理数(整数和分数)的数量, 而不受位数限制的小数可以表示任何实数(有理数和无理数)的数量。通常来说, 在表示同一数量时, 小数和分数可以进行互换, 例如 0.25 小时和 1/4 小时。然而, 二者在结构和教学上都存在很大的区别。在数字结构方面, 分数以 a/b 的符号形式表示, 是一种二分结构, 这种结果更为适合表示一种二维关系, 即两集合的势比; 而小数以十进制形式表示, 这种结构则更为适合表示一种一维关系, 即绝对数值。在教学中, 分数和小数所采用的表征模型也存在不同。在教学分数时, 教师通常采用圆饼状等离散型模型(如将一个圆切成面积相等的几块), 而在小数教学时却常使用连续型数字线模型。而这种结构和教学上的区别导致不同的有理数记法在不同的任务中体现出显著的差异。比如, 当 Gray 要求大学生比较一个有理数(分数 vs. 小数)和一个用离散性点图或者连续性柱状图表示的数值大小时, 发现小数比较任务上表现得明显比分数更好^{[13](P1-19)}。另外, Dewolf 等人对大学生进行分数和小数的关系判断测试, 发现分数在判断关系上表现得明显比小数好, 特别是当数量关系的呈现方式是离散性客体的时候, 分数相比于小数表现出更明显的优势^{[14](P127-150)}。

然而, 以往研究通常采用行为实验的方法对于不同形式的有理数在表达概念意义的差别进行研究, 而缺乏在语境下的比较研究。并且, 以往的研究往往探究在数学语境下, 如数学课本分析或者数学文字题创建任务, 来探究有理数不同记法的语义一致性与概念意义分布, 而缺乏在现实生活语境下对这些问题的探究。

本研究以人教版 1-6 年级的数学课本和媒体语言语料库 (MLC) 为研究对象, 运用计量的方法描述和分析了汉语小数和分数在数学教材以及口语中的使用情况。

二、教材分析

我们就分数、小数和离散性客体、连续性客体语义一致性问题以及分数、小数的语义概念区别对人教版 1-6 年级数学课本中的分数和小数数字文字题进行分析。

1. 方法

我们使用人教版小学 1-6 年级数学教材 (2014) 作为研究材料。这套数学教材是浙江省内大部分城区通用的标准化数学教材。每个年级

分为两个学期，每个学期有一本相对应的数学教材。我们对所有含有小数、分数的数字文字题进行分析。以数字作为计数标准，每一个数字算作一道数字文字题。以这个标准，我们总共统计了351道数学文字题作为研究对象，其中，179道文字题是分数文字题，172道文字题是小数文字题。

2. 文字题编码

我们根据 Rapp et al. (2015) 提出的编码方案对所有的351道文字题进行编码。数学文字题首先以数字类型（分数 vs. 小数）进行分类，然后根据其描述的客体类型分为离散性文字题或

者连续性文字题。连续性文字题通常包含计量单位（如长度、重量、货币等），而离散性文字题指包含不可分割的可数物体（如木棒、书、兔子等）或者可被分成同等可数部分的连续性物体（如被分成同等片数的西瓜等）。除此之外，我们还根据文字题中出现数字所表达的概念意义（一维 vs. 二维）对文字题进行分类。一维文字题是指包含的特定数字在文字题中表达一种绝对数量，二维文字题是指包含的特定数字在文字题中表达一种二维关系。文字题编码的具体例子见表1和表2。

表1 客体类型分类举例

客体类型		例子
连续性	计量单位（如长度、重量、货币等）	爷爷今年64岁，小兰的年龄是爷爷的1/8，爸爸的年龄是小兰的4倍，小兰的爸爸和小兰各是多少岁？ 货车自重2.8吨，满载时共重8.7吨。载质量要求不超过6吨。它是否超载了？
离散性	离散性物体（如木棒），物质名词的部分（如西瓜），集体名词（如人们）	一堆小棒有18根，拿出这堆小棒的1/3，拿出了多少根？ 一个西瓜，哥哥吃了2/8，弟弟吃了1/8，兄弟俩一共吃了这个西瓜的几分之几？

表2 语义概念类型举例

语义概念类型	例子
一维	绝对数量的体现 一个蝴蝶风筝3.5元，买3个需要多少钱？ 有红、黄、蓝三条丝带。红丝带比黄丝带长7/20m，蓝丝带比黄丝带短3/20m，红丝带与蓝丝带相差多少米？ 非洲野狗的最高速度是56千米/时，鸵鸟的最高速度是非洲野狗的1.3倍，鸵鸟的最高速度是多少千米/时？
二维	数量之间相对关系的体现 洗衣机里大约有5kg的衣物，每千克衣物用1/2勺洗衣粉。一共需要放几勺洗衣粉？

3. 结果与分析

数学文字题中数字类型与客体类型的具体分布情况见图1。在小数文字题中，连续性客体占98%，在分数文字题中此百分比降低到53%；在分数文字题中，离散性客体占47%，在小数文字题中，此百分比下降至2%。卡方独立性检验表明，数字类型与客体类型显著相关，

$\chi^2(1, N = 351) = 92.887, p < 0.001, \text{Cramer's } \phi = 0.514$ 。我们同时还发现，在分数文字题中，连续性客体仍然占53%。

通过对数字的概念意义分析，我们发现，在小数文字题中，一维关系占95%，在分数文字题中这个百分比下降至21%；在分数文字题中，

二维关系占79%，在小数文字题中这个百分比降低到5%。具体分布情况见图2。卡方独立性检验表明，数字类型与语义概念类型两个变量显著相关， $\chi^2(1, N = 351) = 193.834, p < 0.001, \text{Cramer's } \phi = 0.743$ 。

这个结果符合 Bassok 等人 (2015, 2016) 对美国基础数学教材以及韩国数学教材的分析结果，反映了中国数学教材中小数更倾向于表示连续性客体，分数更倾向于表示离散型客体。同时，我们还发现，小数通常用于表达一种一维语义概念，即绝对数值；而分数通常用于表达一种二维概念，即两个数值之间的关系，如部分与整体的关系、部分与部分的关系等。

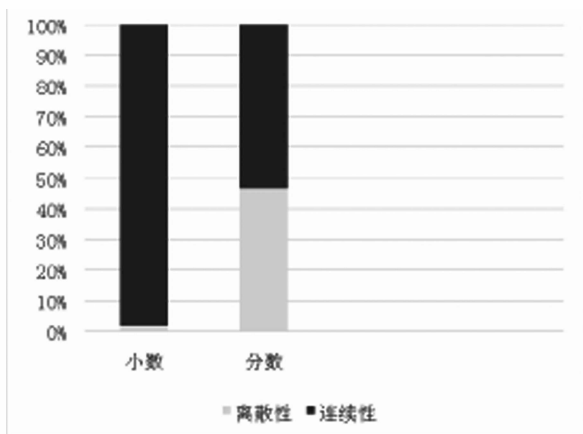


图1 教材中数学类型与客体类型的分布情况

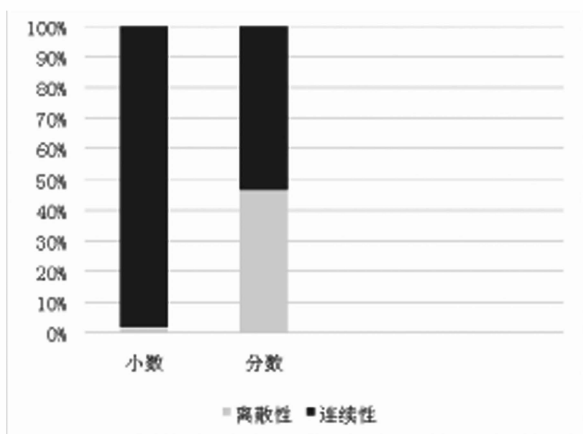


图2 教材中数学类型与语义概念类型的分布情况

三、口语语料分析

1. 方法

我们使用媒体语言语料库 (MLC) 中的广播文本作为研究材料。该语料库是由中国传媒大学国家语言资源监测与研究有声媒体中心开发的开放、免费的语料库。该语料库包括 2008—2013 年六年的 34039 个广播、电视节目的转写文本。由于广播的口语形式更为贴近日常生活，且内容也更为日常，我们选用广播作为特定媒体形式进行研究。不同与对教材的完全统计，我们从该语料库中随机挑选 100 句左右包含小数的句子以及 100 句左右包含分数的句子进行不完全统计。以数字或者数字的汉语表达式作为计数标准，每一个数字或者数字的汉语表达式算作一句小数分句或者分数分句。以这个标准，我们总共统计了 232 句数字分句，其中，121 句分数分句、111 句小数分句。

2. 结果与分析

数字分句中数字类型与客体类型的具体分布情况见图 3。研究结果发现，在小数分句中，连

续性客体占 90%，在分数分句中，这个百分比降低到 52%；在分数分句中，离散性客体占 48%，在小数分句中这个百分比下降至 10%。卡方独立性检验表明，数字类型与客体类型显著相关， $\chi^2(1, N = 232) = 40.057, p < 0.001$, Cramer's $\phi = 0.416$ 。然而，与教材统计分析结果类似，在分数文字题中，连续性客体依旧占据了大部分 (52%)。我们还发现，在小数分句中，一维关系占 92%，在分数分句中这个百分比下降至 0.8%；在分数分句中，二维关系占 99%，在小数分句中这个百分比降低到 8%。具体分布情况见图 4。通过卡方独立性检验，我们发现，数字类型与语义概念类型显著相关， $\chi^2(1, N = 351) = 14.481, p < 0.001$, Cramer's $\phi = 0.916$ 。这个结果符合与我们对中国教材分析结果一致，为该现象提供了现实语境下的证据。

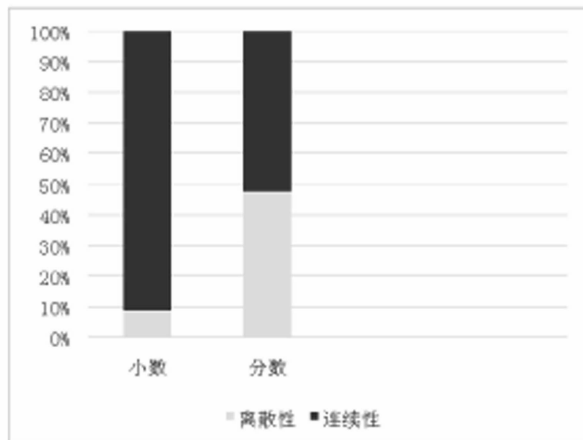


图3 广播口语语料中数学类型与客体类型的分布情况

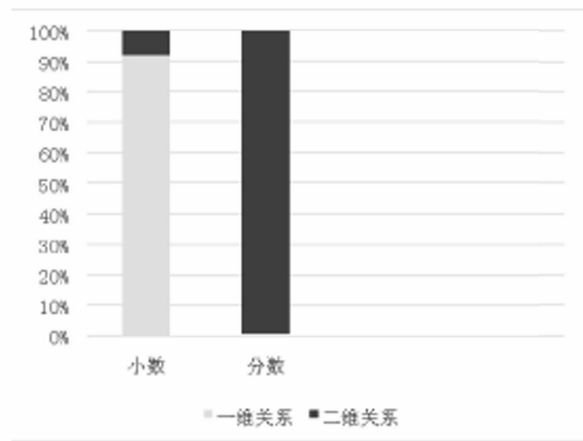


图4 广播口语语料中数学类型与语义概念类型的分布情况

四、结语

本研究以人教版 1-6 年级数学课本中的小数、分数数学文字题以及媒体语言语料库

(MLC) 中广播语料中的部分小数分句和分数分句作为研究语料, 用计量的方法分析了分数和小数在数学教材和口语中的使用规律。研究发现, 汉语中小数更倾向于表示连续性客体, 分数更倾向于表示离散性客体。另外, 研究还发现, 汉语中小数通常用于表达一种一维语义概念, 即绝对数值; 而分数通常用于表达一种二维概念, 即两个数值之间的关系。我们的研究从以下两个方面对前人的研究进行一定的扩展。第一, 此研究为分数在关系推理任务中表现出的优势提供了现实生活中的证据, 包括数学教育者的使用和日常生活中的使用; 第二, 基于前人的研究, 我们的研究结果为语义一致现象的普遍性提供了又一个强有力的证据, 体现了数字类型与所描述客体类型之间存在类推现象, 而更为重要的是, 这种现象很可能是人类认知的普遍规律的体现。

同时, 我们的研究对不同类型有理数的教学具有一定的指导作用。我们发现, 虽然不同的有理数类型都可表达绝对数量与相对关系, 但是不同的数字类型通常有它独特的偏好性。在中国的有理数教学中, 教材通常过分强调绝对数量的概念意义, 而忽视对相对关系意义的指导。可能正是由于这个原因导致儿童在学习分数时通常会遇到很大的困难, 而且这种现象在成人群体中依然存在。此外, 在有理数教学的课程安排上, 中国通常是以分数、小数的顺序进行教学。根据本研究的发现, 在概念意义的表达上, 由于小数更倾向于表达绝对数量概念, 相较于分数与整数的差别更小。因此, 我们建议在课程安排上应该将小数安排在分数之前进行教学, 使得儿童在掌握整数知识后更为轻松地学习与其相似的有理数形式——小数。

[参 考 文 献]

[1] 陈栩茜, 何本炫, 张积家. 加法运算中数学知识和语义知识的整合[J]. 心理学报, 2012(6).
[2] Dehaene, S. Précis of the number sense[J]. *Mind and Language*, 2001(16).
[3] Bassok, M. Semantic alignments in mathematical word problems[R]. 2001.
[4] Bassok, M., & Olseth, K. L. Object-based representations: transfer between cases of continuous and discrete models of change[J]. *Journal of Experimental Psychology*

Learning Memory & Cognition, 1995(6).
[5] Bassok, M., Chase, V. M., & Martin, S. A. Adding apples and oranges: alignment of semantic and formal knowledge[J]. *Cognitive Psychology*, 1998(2).
[6] Martin, S. A., & Bassok, M. Effects of semantic cues on mathematical modeling: evidence from word-problem solving and equation construction tasks[J]. *Memory & Cognition*, 2005(3).
[7] Fisher, K. J., Bassok, M., & Osterhout, L. (2010). When two plus two does not equal four: Event-related potential responses to semantically incongruous arithmetic word problems. In S. Ohlsson & R. Catrambone (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Cognitive Science Society* [M]. Austin, TX: Cognitive Science Society, 2010.
[8] Rapp, M., Bassok, M., Dewolf, M., & Holyoak, K. J. Modeling discrete and continuous entities with fractions and decimals[J]. *Journal of Experimental Psychology Applied*, 2015(1).
[9] Lee, H. S., Dewolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. Conceptual and procedural distinctions between fractions and decimals: a cross-national comparison[J]. *Cognition*, 2016(147).
[10] Tyumeneva, Y. A., Larina, G., Alexandrova, E., Dewolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. Semantic alignment across whole-number arithmetic and rational numbers: evidence from a Russian perspective[J]. *Thinking & Reasoning*, 2017(6).
[11] Kieren, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* [M]. Columbus, Oh: ERIC/SMEAC, 1976.
[12] Kieren, T. E. The rational number construct: its elements and mechanisms[M]. In *Recent research on number learning*, 1980.
[13] Gray, M. E., Dewolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. Dissociation between magnitude comparison and relation identification across different formats for rational numbers[J]. *Thinking & Reasoning*, 2017(2).
[14] DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. Conceptual structure and the procedural affordances of rational numbers: Relational reasoning with fractions and decimals[J]. *Journal of Experimental Psychology: General*, 2015(1).

[责任编辑 薄 刚]